Teorem: Bir $A \in \mathcal{F}^n_n$ matrisi için aşağıdakiler denktir.

1) $\text{rank} A = n$
2) A regülerdir
3) A I_n e denktir
4) A elementer matrislerin çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: $1 \Rightarrow 2)$ $\text{rank} A = n$ olsun. A ya karşılık gelen

$$A : \mathcal{F}^n \xrightarrow{\text{lin.}} \mathcal{F}^n$$
$$x \longrightarrow A(x) = AX$$

dönüşümü için $\text{rank} A = \text{boy} A(\mathcal{F}^n) = \text{boy} \mathcal{F}^n = n$

dir. $A(\mathcal{F}^n) = \mathcal{F}^n$ olduğundan A örtendir.

$A : V \longrightarrow W$ lineer, $\text{boy} V = \text{boy} W$ olsun.

A örten $\Leftrightarrow$ A 1-1 dir.

A 1-1 ve örten A^{-1} vardır, O halde

A^{-1} vardır.

$2 \Rightarrow 3)$ A^{-1} var olsun.

O halde $A : \mathcal{F}^n \xrightarrow{\text{lin}} \mathcal{F}$ dönüşümü için

A^{-1} vardır. A dönüşümü örtendir.

$$A(\mathcal{F}^n) = \mathcal{F}^n$$
$$\text{boy} A(\mathcal{F}^n) = \text{boy} \mathcal{F}^n = n$$
$$\text{rank} A = n \Rightarrow \text{rank} A = n$$

A nın satırca indirgenmiş eşelon matrisi R ise

$A \approx R$ olddugundan $\text{rank} A = \text{rank} R$ dir.

$\text{rank} R = n$ ve $R = I_n$ dir.

$A \approx R$ old. dan $A \approx I_n$ dir.

$1 \Rightarrow 4)$ $A \approx I_n$ olsun.

A'dan I_n elde etmek için uygulanan elemanter işlemler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ olsun.

$$\varepsilon_k(\ldots \varepsilon_2(\varepsilon_1(A))\ldots) = I_n$$

$$\underbrace{\varepsilon_k(I_n)}_{E_k} \ldots \underbrace{\varepsilon_2(I_n)}_{E_2} \underbrace{\varepsilon_1(I_n)}_{E_1} A = I_n$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} I_n$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$$

$4 \Rightarrow 1)$ $A = E_1 \cdot E_2 \ldots E_k$ olsun.

$$A = \varepsilon_1(I_n)\, \varepsilon_2(I_n) \ldots \varepsilon_k(I_n)$$

$$A = \varepsilon_1(\varepsilon_2(\ldots \varepsilon_k(I_n)))\ldots)$$

$I_n \approx A \Rightarrow \text{rank} A = \text{rank} I_n = n$ dir.

<u>Örnek:</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi regüler midir.

$\text{rank} A = 3$ veya $A \approx I_3$ olduğu gösterilmeli

$$A \overset{\varepsilon_1}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\varepsilon_3}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$A \approx I_3$ olup A regülerdir.

Bir matrisin Tersinin Bulunması

$A \in \mathcal{F}^n_n$ regüler (tersi var olan) matris olsun. $A^{-1} = ?$

A regüler old.dan teorem gereğince $A \approx I_n$ dir.

$$\varepsilon_k(\ldots \varepsilon_2(\varepsilon_1(A))\ldots) = I_n$$

$$\varepsilon_k(I_n)\ldots \varepsilon_2(I_n)\,\varepsilon_1(I_n)\,A = I_n$$

her iki tarafı A^{-1} ile sağdan çarp.

$$\varepsilon_k(I_n)\ldots \varepsilon_2(I_n)\,\varepsilon_1(I_n) = A^{-1}$$

$$A^{-1} = \varepsilon_k(\ldots(\varepsilon_2(\varepsilon_1(I_n)))\ldots)$$

O halde A dan I_n i elde etmek için uygulanan elemanter işlemleri aynı sırada I_n e uygularsak A^{-1} i buluruz.

$$[A : I_n] \approx \ldots \approx [I_n ; A^{-1}]$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$\varepsilon_1: \alpha_2 \to \alpha_2 + (-3)\alpha_1$

$\quad\alpha_3 \to \alpha_3 + (-2)\alpha_1$

$\varepsilon_2: \alpha_1 \to \alpha_1 + (-2)\alpha_2$

$\quad\alpha_3 \to \alpha_3 + 5\alpha_2$

$\varepsilon_3: \alpha_3 \to \frac{1}{6}\alpha_3$

$\varepsilon_4: \alpha_1 \to \alpha_1 + \alpha_3$

$\quad\alpha_2 \to \alpha_2 + (-1)\alpha_3$

$$[A : I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\varepsilon_1}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\varepsilon_2}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -17 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\varepsilon_3}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right] \overset{\varepsilon_4}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 25/6 & -7/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -17/6 & 5/6 & 1/6 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{I_3} \qquad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 11/2 & -7/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -5/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Lineer Denklem Sistemleri

Tanım: $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenler olsun.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ denklemine n-bilinmeyenli bir denklem adı verilir. Burada $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ denklemin katsayılarıdır. $b \in \mathbb{R}$ sayısına da denklemin sabiti denir.

Tanım: n-bilinmeyenli ve m-denklemli bir lineer denklem sistemi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m$$ biçiminde verilsin.

S lineer denklem sistemi

$$(S) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu denklem sisteminin matrissel gösterimi ise

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ veya $AX=B$ dir.

Burada $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $X=[x_j]_{n\times 1}$ ve $B=[b_i]_{m\times 1}$ dir. A matrisine lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi B ye de sabitlerin matrisi denir.

Bir (S) lineer denklem sistemi verildiğinde bu sistem bize A ve B gibi iki matris verir.

Ayrıca $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ matrisine $(n+1)$ sütun olarak B matrisinin bileşenlerinin eklenmesiyle elde edilen $m\times(n+1)$ tipindeki matrise ilaveli katsayılar matrisi denir ve $[A:B]$ gösterilir.

NOT: $AX=B$ sistemi verilmiş olsun. $B=0$ ise (S)... $AX=0$ olur. Bu durumda (S) sistemine homojen lineer denklem sistemi denir. Aksi halde $(B\neq 0)$ homojen olmayan lineer denklem sistemi denir.

Lineer Denklem Sistemlerinin Elemanter İşlemlerle Çözümü

Tanım: (S)... $AX=B$ denklem sistemi verilsin. Bu denklemi sağlayan her $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektörüne (S) sisteminin bir çözümü denir. O halde Y bir çözüm ise $AY=B$ dir.

NOT: $AX=B$ sisteminin çözümü $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ve $AX=0$ homojen sisteminin çözümü $Z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ olsun. Bu taktirde $Y+Z=(y_1+z_1, y_2+z_2, \ldots, y_n+z_n)$ de $AX=B$ sisteminin bir çözümüdür.

Tanım: Herhangi iki sistem (S) ve (S_1) olsun. Eğer (S) ve (S_1) sistemleri aynı genel çözüme sahip ise (S) ve (S_1) sistemlerine denk sistemler denir ve $(S)\sim(S_1)$ ile gösterilir.

Lineer Denklem Sistemleri İçin Elemanter İşlemler

m denklemli, $n-$ bilinmeyenli bir denklem sistemi (S) olsun. (S) sistemine ait herbir denklemi L_i ile gösterelim

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \quad \text{---} \quad L_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \quad \text{--} \quad L_2$$
$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n=b_i \quad \text{--} \quad L_i$$
$$a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\dots+a_{jn}x_n=b_j \quad \text{--} \quad L_j$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \quad \text{--} \quad L_m$$

yazılabilir. Aşağıdaki işlemlerden herbirine (S) lineer denklem sistemi için elemanter işlemler denir.

Herhangi iki denklemin kendi aralarında yer değiştirmesi, L_i ve L_j herhangi iki denklem olsun

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

Herhangi iki denklemin yerine o denklemin k. katını almak yani L_i, $1\leq i\leq m$ denklemi için

$$L_i \longrightarrow kL_i \quad , k\neq 0$$

Herhangi bir denklem yerine bir başka denklemin $k\neq 0$ katı ile bu denklemin toplamını almak, L_i ve L_j herhangi iki denklem

$$L_i \longrightarrow L_i+kL_j \quad , k\in\mathbb{R}$$

Sonuç: n bilinmeyenli, m denklemli sistem (S) olsun. (S) denklem sistemine uygulanan elementer işlemler (S) sisteminin çözümünü değiştirmez. Bir lineer denklem sistemine elementer işlem uygulamak demek, onun ilaveli matrisine elementer satır işlemi uygulamak demektir. Elementer işlemler sistemin çözümünü değiştirmeyeceğinden ilaveli matris $[A:B]$ olmak üzere

$$[A:B] \approx \cdots \approx [R:B'] \text{ olup}$$

$AX=B$ nin çözümü ile $RX=B'$ nin çözümü aynıdır.

Gauss Yok Etme Yöntemi

n-bilinmeyenli n tane denklemden oluşan $AX=B$ sistemi verilsin. İlaveli matris $[A:B]$ olmak üzere bu matrisin $[C:D]$ satır eşelon matrisi bulunur.

$CX=D$ sistemi geri yerine yazma ile çözülerek $CX=D$ nin yani $AX=B$ nin çözümü bulunmuş olur.

Örnek;

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

sisteminin çözümünü Gauss yok etme yöntemiyle bulunuz.

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{E_1:\ \alpha_2 \to \\ \alpha_3 \to}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$

$$\underset{E_2:\ \alpha_2 \to -\frac{1}{5}\alpha_2}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right] \underset{E_3:\ \alpha_3 \to \alpha_3 + 6\alpha_2}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] = \text{satır eşelen matris.}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+3x_3=9 \\ x_2+x_3=2 \\ \boxed{x_3=3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \boxed{x_2=-1} \\ \boxed{x_1=2} \end{array}$$

Gauss - Jordan İndirgeme Yöntemi

$AX=B$ nin $[A:B]$ matrisine elemanter işlemler uygulanarak $[R:B']$ satırca indirgenmiş eşelon matrisi bulunur.

$RX=B'$ nin çözümü soldan sağa doğru olup direk bulunur. Bu aynı zamanda $AX=B$ nin çözümüdür.

Örnek: $x_1+2x_2+3x_3=6$

$2x_1-3x_2+2x_3=14$ sistemini çözünüz.

$3x_1+x_2-x_3=-2$

Çözüm:

$$[A:B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \approx \cdots \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=3$

Her iki işlemde de sadece satır işlemi uygulanır.

NOT: Bazen sistemin çözümü olmayabilir. Örneğin;

$$[A:B] \approx \cdots \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

sisteminin çözümü yoktur. $0=1$ i denk sağlayan sayı yoktur.

Örnek! $4x_1+3x_2-9x_3+x_4=1$ sist. çözünüz

$-x_1+2x_2-13x_3+3x_4=3$

$3x_1-x_2+8x_3-2x_4=-2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -9 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -13 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & -2 & -2 \end{array}\right] \overset{\varepsilon_1}{\approx} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -17 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -13 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$\varepsilon_1: \alpha_1 \to \alpha_1 - \alpha_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -17 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & -30 & 6 & 6 \\ 0 & -13 & 59 & -11 & -11 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -17 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & 59 & -11 & -11 \end{array}\right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$x_1=0$

$x_2-\frac{2}{3}x_4=-\frac{2}{3}$

$x_3-\frac{x_4}{3}=-\frac{1}{3}$

$x_4=t$ için $x_1=0$ $x_2=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}t$, $x_3=-\frac{1}{3}+\frac{t}{3}$

Örnek: $x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 11x_4 = 1$ Sist. çözünüz.

$5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 5$

$3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -7$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -11 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & -7 & 2 & -7 \end{array}\right] \simeq \cdots \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0 \quad x_2 - 3x_4 = 0 \quad x_3 - 2x_4 = 1 \quad 0 = 0$

$x_4 = t$ için $x_1 = 0 \quad x_2 = 3t \quad x_3 = 2t + 1$

Örnek: $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6$ Sistemin çözünüz

$x_2 + 2x_3 = 3$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \simeq \cdots \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0 \quad x_2 + 2x_3 = 3 \quad 0 = 1$ çözüm yok

Scanned by CamScanner